フィードバックのある連続時間ガウス型通信路における情報伝達(応用函数解析の研究)

井原, 俊輔

数理解析研究所講究録
1039巻 1998年 118-134

フィードバックのある連続時間ガウス型通信路における情報伝達

名大・情報文化 井原俊輔 (Shunsuke Ihara)

1 はじめに

加法的なガウス型雑音が作用する通信路をガウス型通信路（以下では GC と略記する）という．情報理論において最も基本的な通信路の一つとして GC に関しては Shannon [16, 17] 以来多くの研究がなされている（[12, 14, 15] 参照）．

本論文ではフィードバックのある連続時間 GC における相互情報量と通信路容量について考察する．GC における情報量や通信路容量についてのこれまでの研究においては，ガウス型雑音に対し何がしかの技術的仮定を設けた上で議論がなされてきた（[4, 5, 12] 参照）．これに対し，ここでは雑音のガウス過程に対しては特別な条件は一切仮定せず，最も一般的な場合の連続時間 GC を考える．

本論文の第一の目的は，この場合の情報量を計算する式を与えることである（定理１）．これはこれまでの結果（[4, 5]）を一般化したものである．

次に，この情報量の公式をフィードバックのある場合の GC の容量の研究に応用する．入力信号に対して共分散関数の言葉で制限が課せられているとき，GC の容量は線形のスキーム，即ち，ガウス型メッセージを線形なフィードバックを用いて伝達すること，によって達成されることを示す（定理３）．この事実を使うことにより，通信路容量に関するいくつかの性質（定理４，５）を導くこと．さらには，フィードバックのある GC に対する通信路符号化定理（定理６）も証明できる．

2 ガウス型通信路における相互情報量

連続時間 GC に対する数学的モデルは

$$Y(t) = X(t) + Z(t), \qquad t \geq 0, \tag{1}$$

で与えられる．ここで，$X(t), Y(t), Z(t)$ は各々時刻 t における入力信号，出力信号，雑音を表し，$Z = \{Z(t)\}$ はガウス過程である．通信路はフィードバックをもつものとする．ただし，フィードバックには雑音がなく，時間の遅れもないものとする．このことは入力信号 X がメッセージ θ と出力信号 Y の causal な関数であることを意味する．条件を正

確に述べるため，θ の生成する σ-加法族を $\mathcal{F}(\theta)$，$\{Y(u); u \le t\}$ の生成する σ-加法族を $\mathcal{F}_t(Y)$，$\{Y(u); u < t\}$ の生成する σ-加法族を $\mathcal{F}_{t-}(Y)$ と記す．以下の条件 (a.1), (a.2) が満たされているものとする．

(a.1) メッセージ θ は雑音 Z とは独立な確率変数．

(a.2) 時刻 t における入力信号 $X(t)$ は $\mathcal{F}(\theta) \vee \mathcal{F}_{t-}(Y)$ 可測．

情報伝達の立場からすれば，以上の条件の下で議論すれば十分に一般的であり，実際これまでの研究の殆どの場合に上の条件の下で情報量の議論がなされている．しかし，理論的には (a.2) の代わりにより一般的な条件の下で議論することができる．この条件については後で述べる．

フィードバックをもたない場合は，入力信号 $X(t)$ はメッセージ θ のみの関数である．即ち，次の条件が満たされている．

(a.3) 時刻 t における入力信号 $X(t)$ は $\mathcal{F}(\theta)$ 可測．

この場合，$X = \{X(t)\}$ と Z は独立である．

ガウス型雑音 $Z = \{Z(t)\}$ に対しては，通常，確率論においてガウス過程の解析を行うときのように，可分であることと純非決定的（正則ともいう）であることを仮定する．Z を確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の確率過程とし，$Z(t), t \ge 0$, の張る $L^2(\Omega, P)$ の部分空間を $\mathcal{M}(Z)$，$Z(t)$, $0 \le s \le t$, の張る部分空間を $\mathcal{M}_t(Z)$ と記す．任意の t に対して $\mathcal{M}_t(Z)$ が可分のとき Z は可分であるといい，$\cap_{t>0}\mathcal{M}_t(Z) = \phi$ のとき Z は純非決定的であるという．可分性は病的な場合を避けるためだけの仮定であり，またよく知られているように，純非決定性を仮定しても議論の一般性を損なうものではない．ガウス型雑音に対してこれ以外の仮定は一切課さない．したがって我々は最も一般的な場合の GC を考えていることになる．

我々の第一の目的はメッセージ θ と出力信号 $(Y)_0^t = \{Y(u); 0 \le u \le t\}$ の間の相互情報量 $I_t(\theta, Y) = I(\theta, (Y)_0^t)$ に対する式を導くことである．通信終了時間 $T(< \infty)$ を固定して考え，$I_T(\theta, Y)$ に対する式を導けばよい．

メッセージ θ の状態空間は任意の可測空間でよい．したがって，θ は有限次元確率変数でもよいし，確率過程であってもよい．特に断わらない限り確率変数の平均値は常に 0 とする．こうしても一般性は失われない．なお，$(Y)_0^{t-} = \{Y(u); 0 \le u < t\}$ と記す．

相互情報量，あるいは条件付相互情報量の定義と諸性質については [12, 15] などを参照してほしい．

GC のなかでも最も基本的なものは白色ガウス型通信路（WGC）である．WGC は雑音がガウス型ホワイトノイズ $\dot{B}$ の場合であり，形式的には

$$y(t) = x(t) + \dot{B}(t), \quad t \ge 0,$$

と表すことができる．一般には，WGC は上式の積分形

$$Y(t) = \int_0^t x(u)du + B(t), \quad t \ge 0, \tag{2}$$

で表現される．ここで，$B = \{B(t)\}$ はブラウン運動．このとき，もし $\int_0^T E[x(t)^2]dt < \infty$ ならば，情報量は

$$I_T(\theta, Y) = \frac{1}{2}\int_0^T E[|x(t) - \widehat{x}(t)|^2]dt \tag{3}$$

で与えられる [13]．ここで，$\hat{x}(t) = E[x(t)|\mathcal{F}_t(Y)]$ は条件付平均値．

一般の GC における情報量を計算するために，雑音 Z に対するホワイトノイズ $\dot{B}$ を使っての“等価”な表現（標準表現）を考える．それにより (3) を利用して情報量の式を導くことを考える．しかし，一つのホワイトノイズを使っただけでは“等価”な表現を得ることは出来ない．いわば，多次元のホワイトノイズによりはじめて標準表現が可能になり，それにより情報量を計算する．

情報量の公式を導くにあたっては，ガウス過程 $Z = \{Z(t)\}$ の Lévy-Hida-Cramér の意味での標準表現が基本的な役割を果たす．標準表現については次のことが知られている．

命題 1（[2] 参照）可分かつ純非決定的なガウス過程 Z は次の標準表現をもつ：

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{M} \int_0^t F_i(t,u)dB_i(u) + \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K_j} F_{j,k}(t)B_{j,k}(t). \tag{4}$$

ただし，以下の性質が成り立っている．

(i) $B_i = \{B_i(u)\}$, $i = 1, ..., M$, は独立増分をもつガウス過程で

$$E[|dB_i(u)|^2] = dm_i(u), \qquad i = 1, ..., M,$$

ここで，$\{m_i\}$ は $m_i \gg m_{i+1}$ を満たす連続的な測度．

(ii) $\{B_{j,k}(t)\}$ は次のようなガウス過程：

$$B_{j,k}(t) = B_{j,k}\, 1_{I_j}(t).$$

ここで，$B_{j,k}$ は標準正規分布に従う確率変数で，I_j は $I_j = (t_j, T]$ または $I_j = [t_j, T]$ の形の区間で $I_{j+1} \subset I_j$ である．なお，$1_I(t)$ は集合 I の定義関数．

(iii) B_i および $B_{j,k}$ はすべて互いに独立．

(iv) 次のことが成り立つ：

$$\mathcal{M}_t(Z) = \mathcal{M}_t(\boldsymbol{B}), \quad t \geq 0.$$

ここで，$\mathcal{M}_t(\boldsymbol{B})$ は $\{B_i(u); u \leq t\}$ および $\{B_{j,k}(u); u \leq t\}$ の張る $L^2(\Omega, P)$ の部分空間．

(v) $\{F_i(t,u),\ F_{j,k}(t)\}$ は標準核．

標準核は以下の性質を持つ．各 $F_i(t,u)$ は Volterra 関数（$t < u$ なら $F_i(t,u) = 0$ である関数）で，各 t において

$$\sum_{i=1}^{M} \int_0^T |F_i(t,u)|^2 dm_i(u) < \infty.$$

$t \notin I_j$ ならば $F_{j,k}(t) = 0$ で，各 t において

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K_j} |F_{j,k}(t)|^2 < \infty.$$

なお，表現 (4) において M, K_j, J は必ずしも有限とは限らない．以後，簡単のため index の集合を $\boldsymbol{N} = \{(i,j,k); i = 1,...,M, j = 1,...,J, k = 1,...,K_j\}$ と記す．また，誤解のおそれのない場合には，和 $\sum_{i=1}^{M}$, $\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K_j}$ を各々単に $\sum_i$, $\sum_{j,k}$ と略記する．

GC の情報量や通信路容量について議論するとき再生核ヒルベルト空間（RKHS）を使ったアプローチが有効である．Z の共分散関数 $\Gamma_Z(t,s) = E[Z(t)Z(s)]$ $(0 \le s, t \le T)$ を再生核とする RKHS を $\mathcal{H}_T(Z)$ とする．次の形の関数 $\Phi(t)$ を考える．

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^{M} \int_0^t F_i(t,u)\varphi_i(u)\,dm_i(u) + \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K_j} F_{j,k}(t)\Phi_{j,k}(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

ここで，$\varphi_i \in L^2([0,T], dm_i)$ かつ $\Phi_{j,k}(t)$ は$\Phi_{j,k}(t) = \Phi_{j,k}\,1_{I_j}(t)$ の形の関数（$\Phi_{j,k}$ は定数）．よく知られているように，RKHS $\mathcal{H}_T(Z)$ は

$$\|\Phi\|_{Z,T}^2 = \sum_i \int_0^T |\varphi_i(t)|^2\,dm_i(t) + \sum_{j,k} |\Phi_{j,k}|^2 < \infty \tag{6}$$

を満たすすべての Φ からなる．そして，$\mathcal{H}_T(Z)$ のノルムは $\|\cdot\|_{Z,T}$ である．

GC (1) における入力信号 X に対し，その道 $X(\omega) = \{X(t,\omega); 0 \le t \le T\}$ が確率 1 で RKHS $\mathcal{H}_T(Z)$ に属し，

$$E[\|X\|_{Z,T}^2] < \infty \tag{7}$$

であると仮定する．実は，フィードバックがなく X がガウス過程の場合には，この条件は情報量が有限であるための必要かつ十分条件である [4]．よって，この条件を仮定することは自然である．このとき X は

$$X(t) = \sum_{i=1}^{M} \int_0^t F_i(t,u)x_i(u)\,dm_i(u) + \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K_j} F_{j,k}(t)X_{j,k}(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{8}$$

と書ける．ここで，$\{x_i(t)\}$ は確率 1 で $x_i \in L^2([0,T], dm_i)$ なる確率過程であり，$\{X_{j,k}(t)\}$ は $X_{j,k}(t) = X_{j,k}\,1_{I_j}(t)$ なる形の確率過程である．条件 (7) は

$$E[\|X\|_{Z,T}^2] = \sum_i \int_0^T E[|x_i(t)|^2]\,dm_i(t) + \sum_{j,k} E[|X_{j,k}|^2] < \infty \tag{9}$$

となる．対応する出力信号 $Y = \{Y(t)\}$ は

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{M} \int_0^t F_i(t,u)dY_i(u) + \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K_j} F_{j,k}(t)Y_{j,k}(t), \tag{10}$$

と書ける．ここで，

$$\left\{ \begin{array}{ll} Y_i(t) = \int_0^t x_i(u)\,dm_i(u) + B_i(t), & i = 1,...,M, \\ Y_{j,k}(t) = X_{j,k}(t) + B_{j,k}(t), & j = 1,...,K,\ k = 1,...,K_j. \end{array} \right. \tag{11}$$

である．なお，$\{Y_{j,k}(t)\}$ は次の形をしていることに注意しておく．

$$Y_{j,k}(t) = Y_{j,k}\, 1_{I_j}(t), \quad Y_{j,k} = X_{j,k} + B_{j,k}.$$

直観的にいえば，(11) は白色ガウス型通信路がたくさん平行して並んでいる通信路を表している．そこで，(11) を GC (1) に対応する多次元 WGC ということにする．$M + \sum_{j=1}^{J} K_j$ 次元確率過程を次のように定義する．

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y}(t) = ((Y_i(t), Y_{j,k}(t));\ (i,j,k) \in \boldsymbol{N}), \\ \boldsymbol{B}(t) = ((B_i(t), B_{j,k}(t));\ (i,j,k) \in \boldsymbol{N}), \\ \boldsymbol{X}(t) = ((X_i(t), X_{j,k}(t));\ (i,j,k) \in \boldsymbol{N}), \end{cases} \tag{12}$$

ここで，$X_i(t) = \int_0^t x_i(u)\, dm_i(u)$．このとき多次元 WGC (11) は単に

$$\boldsymbol{Y}(t) = \boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{B}(t), \quad t \geq 0, \tag{13}$$

と書くことができる．

条件 (a.2) を弱めた次の条件 (a.2') の下で，情報量 $I_T(\theta, Y)$ に対する公式を与える．

(a.2') 各 t において $X(t)$ は $\mathcal{G}_{t-}$ 可測．ここで，$\{\mathcal{G}_t; t \geq 0\}$ は $\mathcal{F}(\theta) \vee \mathcal{F}_t(Y) \subset \mathcal{G}_t$ であり，もし $t \leq u_1 \leq u_2$ ならば $B_i(u_2) - B_i(u_1)$ は $\mathcal{G}_t$ と独立であるような σ-加法族の増加列．

なお，$I_T(\theta, Y|\zeta)$ で ζ が与えられたときの θ と $(Y)_0^T$ の間の条件付情報量を表す．

定理 1 ガウス型雑音 Z は (4) の標準表現をもち，条件 (a.1) および (a.2') が満たされているものとする．入力信号 $X = \{X(t)\}$ は，その道が確率 1 で RKHS $\mathcal{H}_T(Z)$ に属し (7) を満たす，したがって，X は (8) の形をしていて (9) を満たしているものとする．このとき，フィードバックの有る GC (1) における情報量は次の式で計算される．

$$\begin{aligned} I_T(\theta, Y) &= I_T(\theta, \boldsymbol{Y}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M} \int_0^T E[|\tilde{x}_i(u) - \hat{x}_i(u)|^2] dm_i(u) + \sum_{j=1}^{J} I_T(\theta, Y_j^{\mathrm{dis}} | (Y)_0^{t_j-}), \end{aligned} \tag{14}$$

ここで，

$$\tilde{x}_i(u) = E[x_i(u) | \mathcal{F}(\theta) \vee \mathcal{F}_{u-}(Y)], \quad \hat{x}_i(u) = E[x_i(u) | \mathcal{F}_{u-}(Y)]$$

は条件付平均値で，

$$Y_j^{\mathrm{dis}} = \{Y_j^{\mathrm{dis}}(t)\}, \quad Y_j^{\mathrm{dis}}(t) = (Y_{j,1}(t), \ldots, Y_{j,K_j}(t))$$

である．さらに，条件 (a.2) が成り立っているときは

$$\begin{aligned} I_T(\theta, Y) &= I_T(\theta, \boldsymbol{Y}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M} \int_0^T E[|x_i(u) - \hat{x}_i(u)|^2] dm_i(u) + \sum_{j=1}^{J} I_T(\theta, Y_j^{\mathrm{dis}} | (Y)_0^{t_j-}). \end{aligned} \tag{15}$$

式 (14) の右辺の第 2 項における各 $I_T(\theta, Y_j^{\mathrm{dis}}|(Y)_0^{t_j-})$ の計算は differential entropy の計算に帰着される．したがって (14) は情報量を具体的に計算する公式を与えている．

フィードバックのない場合には，情報量に対する式が Hitsuda [4] により与えれている．我々の式 (14) とは右辺第 2 項の表現が少し異なっている．

雑音 Z の標準表現 (4) において離散スペクトル部分（右辺第 2 項）がない場合は，上の結果は既に Hitsuda-Ihara [5] により得られている．ここで，その結果を少し一般化した形で述べて，それを使って定理 1 を証明する．

命題 2 [5]　雑音 $Z = \{Z(t)\}$ の標準表現 (4) において離散スペクトル部分がないとする．このとき，定理 1 と同じ仮定の下で

$$I_T(\theta, Y) = I_T(\theta, \boldsymbol{Y}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\int_0^T E[|\tilde{x}_i(u) - \hat{x}_i(u)|^2]dm_i(u). \tag{16}$$

Hitsuda-Ihara [5] では $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}(\theta) \vee \mathcal{F}_t(Y)$ の場合に，すなわち条件 (a.2) の下で，上の結果を示した．しかし，その証明方法は条件 (a.2') の下でも適用でき，式 (16) が証明できる．

我々は多次元 WGC (13) を通す場合，GC (1) の場合と全く同じ情報量を送っていることが示せる．

命題 3 [3]　定理 1 の仮定の下では

$$\mathcal{M}_t(Y) = \mathcal{M}_t(\boldsymbol{Y}), \quad t \geq 0, \tag{17}$$

が成立ち，したがって

$$I_t(\theta, Y) = I_t(\theta, \boldsymbol{Y}), \quad t \geq 0, \tag{18}$$

が成り立つ．

上の二つの命題を使って 定理 1 を証明する．

定理 1 の証明．　I_j $(j = 1, ..., J)$ を命題 1 の区間とする．そして

$$Y_j^{\mathrm{con}} = \{(Y_1(t), ..., Y_M(t)); t \in I_j \cap I_{j+1}^c\}, \quad j = 0, 1, ..., J,$$

とおく．ただし $I_0 = I_{J+1}^c = [0, T]$ である．情報量については，いわゆる chain rule

$$I(\xi, (\eta_1, \eta_2)|\zeta) = I(\xi, \eta_1|\zeta) + I(\xi, \eta_2|\zeta, \eta_1)$$

が成り立つ．これを繰り返し使い

$$\begin{aligned} I_T(\theta, \boldsymbol{Y}) &= I(\theta, (Y_0^{\mathrm{con}}, ..., Y_J^{\mathrm{con}}, Y_1^{\mathrm{dis}}, ..., Y_J^{\mathrm{dis}})) \\ &= \sum_{j=0}^{J} I(\theta, Y_j^{\mathrm{con}}|\, Y_0^{\mathrm{con}}, ..., Y_{j-1}^{\mathrm{con}}, Y_1^{\mathrm{dis}}, ..., Y_{j-1}^{\mathrm{dis}}) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{J} I(\theta, Y_j^{\mathrm{dis}}|\, Y_0^{\mathrm{con}}, ..., Y_j^{\mathrm{con}}, Y_1^{\mathrm{dis}}, ..., Y_{j-1}^{\mathrm{dis}}). \end{aligned} \tag{19}$$

を得る．(17) より

$$\mathcal{F}_t(Y) = \mathcal{F}_t(\boldsymbol{Y}), \quad t \geq 0,$$

である．$u \in I_j \cap I_{j+1}^c$ とする．このとき

$$\begin{aligned}\tilde{x}_i(u) &= E[x_i(u) | \mathcal{F}(\theta) \vee \mathcal{F}_{u-}(Y)] \\ &= E[x_i(u) | \mathcal{F}(\theta) \vee \mathcal{F}_{u-}(\boldsymbol{Y})] \\ &= E[x_i(u) | \mathcal{F}(\theta) \vee \mathcal{F}_u(Y_0^{\text{con}}, ..., Y_j^{\text{con}}) \vee \mathcal{F}(Y_1^{\text{dis}}, ..., Y_j^{\text{dis}})] \\ &= E[x_i(u) | \mathcal{F}(\theta) \vee \mathcal{F}_u(Y_j^{\text{con}}) \vee \mathcal{F}_u(Y_0^{\text{con}}, ..., Y_{j-1}^{\text{con}}) \vee \mathcal{F}(Y_1^{\text{dis}}, ..., Y_j^{\text{dis}})].\end{aligned}$$

が成り立つ．同様に

$$\begin{aligned}\hat{x}_i(u) &= E[x_i(u) | \mathcal{F}_{u-}(Y)] \\ &= E[x_i(u) | \mathcal{F}_u(Y_j^{\text{con}}) \vee \mathcal{F}_u(Y_0^{\text{con}}, ..., Y_{j-1}^{\text{con}}) \vee \mathcal{F}(Y_1^{\text{dis}}, ..., Y_j^{\text{dis}})].\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，命題 2 を適用し

$$I(\theta, Y_j^{\text{con}} | Y_0^{\text{con}}, ..., Y_{j-1}^{\text{con}}, Y_1^{\text{dis}}, ..., Y_{j-1}^{\text{dis}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M} \int_{t_j}^{t_{j+1}} E[|\tilde{x}_i(u) - \hat{x}_i(u)|^2] \, dm_i(u)$$

を得る．したがって

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{J} I(\theta, Y_j^{\text{con}} | Y_0^{\text{con}}, ..., Y_{j-1}^{\text{con}}, Y_1^{\text{dis}}, ..., Y_{j-1}^{\text{dis}}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{J} \sum_{i=1}^{M} \int_{t_j}^{t_{j+1}} E[|\tilde{x}_i(u) - \hat{x}_i(u)|^2] \, dm_i(u) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M} \int_0^T E[|\tilde{x}_i(u) - \hat{x}_i(u)|^2] \, dm_i(u). \qquad (20)\end{aligned}$$

が成り立つ．明らかに

$$I(\theta, Y_j^{\text{dis}} | Y_0^{\text{con}}, ..., Y_j^{\text{con}}, Y_1^{\text{dis}}, ..., Y_{j-1}^{\text{dis}}) = I(\theta, Y_j^{\text{dis}} | (Y)_0^{t_j-}) \qquad (21)$$

である．最後に (14) は (18), (19), (20), (21) から得られる． □

3　ガウス型通信路の容量

WGC の場合には，平均電力制限の下で，フィードバックの有るときの容量はフィードバックのないときの容量と同じであり，その容量を計算することができる [13]．しかしながら，

一般の GC の場合にはフィードバックの有るときの容量を計算する公式は知られていない．我々は先に得られた情報量の公式 (14) を使うことによりガウス型通信路の容量についてのいくつかの基本的性質を導く．

一般に，入力信号に対しては一定の条件が課せらている．入力可能なメッセージ θ と入力信号 $X=\{X(t)\}$ の組 (θ,X) 全体を $\mathcal{A}$ とする．フィードバックの有る GC (1) の $\mathcal{A}$ で与えられる制限の下での容量 $C(\mathcal{A})$ は

$$C(\mathcal{A})=\sup\{I_T(\theta,Y);\ (\theta,X)\in\mathcal{A}\} \tag{22}$$

で定義される．

入力信号に対する典型的な条件は平均電力制限である．我々は信号が入力可能か否かが信号の共分散関数の言葉で与えられている場合を考える．これは平均電力制限を一般化したものである．入力可能な信号の共分散関数の全体を $\boldsymbol{\Gamma}$ とする．即ち，信号 X はその共分散関数 Γ_X が

$$\Gamma_X\in\boldsymbol{\Gamma} \tag{23}$$

を満たすとき入力可能である．このとき，入力可能なメッセージと入力信号の組 (θ,X) 全体は

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\Gamma})=\{(\theta,X);\ (\theta,X)\ \text{は (a.1), (a.2), (23) を満たす}\}$$

と表せる．もしメッセージ $\theta=\{\theta(t)\}$ がガウス過程（このときガウス型メッセージという）でフィードバックが線形ならば，入力信号 X は

$$X(t)=\theta(t)-\zeta(t),\qquad 0\le t\le T, \tag{24}$$

と書ける．ここで $\zeta(\cdot)$ は出力信号 Y の causal な関数である．クラス $\mathcal{A}(\boldsymbol{\Gamma})$ に対応して，クラス $\mathcal{A}_g(\boldsymbol{\Gamma})$ を

$$\mathcal{A}_g(\boldsymbol{\Gamma})=\{(\theta,X)\in\mathcal{A}(\boldsymbol{\Gamma});\ X\ \text{は (24) の形で}\ (\theta,X,Z)\ \text{はガウス系}\}$$

と定める．

先ず，任意の情報伝達スキームに対し，同じ共分散をもつガウス型情報伝達スキームが存在することを示そう．このため，確率過程 $X=\{X(t)\}$ と $\widetilde{X}=\{\widetilde{X}(t)\}$ が同じ共分散関数をもつとき $X\overset{\text{cov}}{\sim}\widetilde{X}$ と記す．

定理 2 フィードバックの有る GC (1) の入力信号 $X=\{X(t)\}$ は定理 1 の仮定および (a.2) を満たしているものとする．このとき，以下の条件を満たす確率過程 $\theta^0=\{\theta^0(t)\}$ および $\zeta^0=\{\zeta^0(t)\}$ が存在する．

(i) $\theta^0=\{\theta^0(t)\}$ と $\zeta^0=\{\zeta^0(t)\}$ は，確率 1 で $\theta^0(\cdot,\omega),\ \zeta^0(\cdot,\omega)$ がともに $\mathcal{H}_T(Z)$ に属し，かつ

$$E[\|\theta^0\|_{Z,T}^2],\ E[\|\zeta^0\|_{Z,T}^2]<\infty,$$

であるようなガウス過程.

(ii) 式

$$Y^0(t) = X^0(t) + Z(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{25}$$

はフィードバックの有る GC を表している. ただし,

$$X^0(t) = \theta^0(t) - \zeta^0(t). \tag{26}$$

(iii) 確率過程 θ^0 は $Z = \{Z(t)\}$ と独立.
(iv) 各 t において, $\zeta^0(t)$ は $\mathcal{F}_t(Y^0)$ 可測.
(v) $(\theta^0, \zeta^0, Z, Y^0)$ はガウス系をなす.
(vi) $(X^0, Y^0, Z) \overset{\mathrm{cov}}{\sim} (X, Y, Z)$.

証明は Appendix で与える.

上の定理は, それ自身興味あるものであるが, それのみならず, フィードバックの有る GC の容量を調べるとき重要な役割を果たす.

我々はフィードバックの有る GC の容量はガウス系の中で, 即ち, ガウス型メッセージを線形なフィードバックを使って送ることにより容量が達成されることを示すことができる.

定理 3 フィードバックのある GC (1) の容量について

$$C(\mathcal{A}(\boldsymbol{\Gamma})) = C(\mathcal{A}_g(\boldsymbol{\Gamma})) \tag{27}$$

が成り立つ.

定理 3 の証明には次の補題（証明は省略する）を使う.

補題 1 $\xi_1, ..., \xi_n, \xi_1^0, ..., \xi_n^0$ は実確率変数, Y と Y^0 は時径空間を共有する実確率過程とする. $(\xi_1^0, ..., \xi_n^0, Y^0)$ はガウス型で $(\xi_1, ..., \xi_n, Y) \overset{\mathrm{cov}}{\sim} (\xi_1^0, ..., \xi_n^0, Y^0)$ とする. このとき

$$h(\xi_1, ..., \xi_n | Y) \le h(\xi_1^0, ..., \xi_n^0 | Y^0) \tag{28}$$

が成り立つ. なお, Y が与えられたときの $(\xi_1, ..., \xi_n)$ の条件付分布が連続でないときは, $h(\xi_1, ..., \xi_n | Y) = -\infty$ とする.

定理 3 の証明. 不等式 $C(\mathcal{A}(\boldsymbol{\Gamma})) \ge C(\mathcal{A}_g(\boldsymbol{\Gamma}))$ は自明だから, その逆向きの不等式

$$C(\mathcal{A}(\boldsymbol{\Gamma})) \le C(\mathcal{A}_g(\boldsymbol{\Gamma})) \tag{29}$$

を示せばよい. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $(\theta, X) \in \mathcal{A}(\boldsymbol{\Gamma})$ かつ

$$I_T(\theta, Y) > C(\mathcal{A}(\boldsymbol{\Gamma})) - \varepsilon \tag{30}$$

であるようなメッセージ θ と入力信号 $X=\{X(t)\}$ が存在する．ここで $Y=\{Y(t)\}$ は対応する出力信号．定理 2 より，この (θ, X) に対応する定理 2 の性質 (i) – (vi) を満たすメッセージ $\theta^0=\{\theta^0(t)\}$ と入力信号 $X^0=\{X^0(t)\}$ が存在する．性質 (ii), (iii), (iv), (vi) は

$$(\theta^0, X^0) \in \mathcal{A}_g(\boldsymbol{\Gamma})$$

を意味する．情報量 $I_T(\theta, Y)$ および $I_T(\theta^0, Y^0)$ については定理 1 を使い

$$I_T(\theta, Y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\int_0^T E[|x_i(u)-\widehat{x}_i(u)|^2]dm_i(u) + \sum_{j=1}^{J} I_T(\theta, Y_j^{\mathrm{dis}}|(Y)_0^{t_j-}) \tag{31}$$

および

$$I_T(\theta^0, Y^0) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\int_0^T E[|x_i^0(u)-\widehat{x}_i^0(u)|^2]dm_i(u) + \sum_{j=1}^{J} I_T(\theta^0, Y_j^{0\ \mathrm{dis}}|(Y^0)_0^{t_j-}) \tag{32}$$

により与えられる．ここで

$$X^0(t) = \sum_i \int_0^t F_i(t,u)x_i^0(u)\,dm_i(u) + \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K_j} F_{j,k}(t)X_{j,k}^0(t)$$

である．$\widetilde{x}_i(u)$ および $\widetilde{x}_i^0(u)$) を $x_i(u)$ の各々 $\{Y(s);\ s\le u\}$ および $\{Y^0(s);\ s\le u\}$) の張る線形空間上の元による 2 乗平均誤差の意味での最適予測とする．一般に

$$E[|x_i(u)-\widehat{x}_i(u)|^2] \le E[|x_i(u)-\widetilde{x}_i(u)|^2] \tag{33}$$

である．一方，(x_i^0, Y^0) はガウス型で $(x_i, Y) \overset{\mathrm{cov}}{\sim} (x_i^0, Y^0)$ だから，

$$\widetilde{x}_i^0(u) = \widehat{x}_i^0(u)$$

かつ

$$E[|x_i^0(u)-\widehat{x}_i^0(u)|^2] = E[|x_i^0(u)-\widetilde{x}_i^0(u)|^2] = E[|x_i(u)-\widetilde{x}_i(u)|^2] \tag{34}$$

が成り立つ．(33) と (34) より

$$\sum_{i=1}^{M}\int_0^T E[|x_i(u)-\widehat{x}_i(u)|^2 dm_i(u) \le \sum_{i=1}^{M}\int_0^T E[|x_i^0(u)-\widehat{x}_i^0(u)|^2]dm_i(u) \tag{35}$$

が成り立つ．もし K_j が有限ならば，

$$\begin{aligned} I_T(\theta, Y_j^{\mathrm{dis}}|(Y)_0^{(t_j-)}) &= h(Y_j^{\mathrm{dis}}|(Y)_0^{t_j-}) - h(Y_j^{\mathrm{dis}}|\theta, (Y)_0^{t_j-}) \\ &= h(Y_j^{\mathrm{dis}}|(Y)_0^{t_j-}) - h(B_j^{\mathrm{dis}}) \end{aligned}$$

および
$$I_T(\theta^0,(Y^0)_j^{\mathrm{dis}}|(Y^0)_0^{t_j-}) = h((Y^0)_j^{\mathrm{dis}}|(Y^0)_0^{t_j-}) - h(B_j^{\mathrm{dis}})$$
である．補題 1 より
$$h(Y_j^{\mathrm{dis}}|(Y)_0^{t_j-}) \le h((Y^0)_j^{\mathrm{dis}}|(Y^0)_0^{t_j-})$$
だから
$$I_T(\theta, Y_j^{\mathrm{dis}}|(Y)_0^{t_j-}) \le I(\theta^0,(Y^0)_j^{\mathrm{dis}}|(Y^0)_0^{t_j-}) \tag{36}$$
である．$K_j=\infty$ の場合でも，(36) は成り立つ．故に
$$\sum_{j=1}^{J} I_T(\theta, Y_j^{\mathrm{dis}}|(Y)_0^{t_j-}) \le \sum_{j=1}^{J} I_T(\theta^0,(Y^0)_j^{\mathrm{dis}}|(Y^0)_0^{t_j-}) \tag{37}$$
を得る．(31), (32), (35), (37) を合わせ
$$I_T(\theta, Y) \le I_T(\theta^0, Y^0)$$
を得る．したがって，(30) に注意すれば，
$$C(\mathcal{A}(\boldsymbol{\Gamma})) - \varepsilon < I_T(\theta^0, Y^0) \le C(\mathcal{A}_g(\boldsymbol{\Gamma}))$$
がわかる．$\varepsilon > 0$ は任意だから (29) を得る． □

定理 3 により，我々はフィードバックの有る GC の容量はガウス系の中で達成されることが保証された．この事実を使えば，フィードバックの有る場合の容量と無い場合の容量との間に成り立つ有名な不等式を示すことができる．制限 (23) の下でのフィードバックが無いときの容量 $C_{NF}(\mathcal{A}(\boldsymbol{\Gamma}))$ は
$$C_{NF}(\mathcal{A}(\boldsymbol{\Gamma})) = \sup_X\{I_T(X,Y); X \text{ は } Z \text{ と独立で (23) を満たす}\}$$
で定義される．

定理 4 一般の GC (1) に対し，制限 (23) の下での，フィードバックの有るときの容量 $C(\mathcal{A}(\boldsymbol{\Gamma}))$ とフィードバックのないときの容量 $C_{NF}(\mathcal{A}(\boldsymbol{\Gamma}))$ の間には不等式
$$C_{NF}(\mathcal{A}(\boldsymbol{\Gamma})) \le C(\mathcal{A}(\boldsymbol{\Gamma})) \le 2C_{NF}(\mathcal{A}(\boldsymbol{\Gamma})) \tag{38}$$
が成り立つ．この不等式の右辺の 2 はより小さな数でおきかえることはできない．

この不等式は最初に Pinsker (1968) が主張し，離散時間の場合には Cover-Pombra [1] がエレガントな証明を与えた．上界の “2” がタイトであることは [8, 9] で示された．連続時間の場合には，ガウス型雑音が命題 2 の仮定を満たしているときは，[10] で証明された．そのような仮定なしにも (38) は [10] と同じ方法で証明できる．

次に，GC の容量と雑音が非ガウス型の場合の容量の間に成り立つ不等式を示す．

定理 5 GC (1) に対し，$Z \overset{\mathrm{cov}}{\sim} \tilde{Z}$ なる雑音 $\tilde{Z} = \{\tilde{Z}(t)\}$ の作用する通信路

$$\tilde{Y}(t) = X(t) + \tilde{Z}(t), \qquad t \geq 0 \tag{39}$$

を考える．同じ制限 (23) の下での通信路 (39) の容量を $\tilde{C}(\mathcal{A}(\boldsymbol{\Gamma}))$ とする．このとき

$$C(\mathcal{A}(\boldsymbol{\Gamma})) \leq \tilde{C}(\mathcal{A}(\boldsymbol{\Gamma})) \leq C(\mathcal{A}(\boldsymbol{\Gamma})) + D(\tilde{Z}_0^T \| Z_0^T)$$

が成り立つ．ここで，$D(\cdot\|\cdot)$ はダイバージェンス（相対エントロピー）である．

フィードバックがない場合は，この定理は [6] で示された．定理の証明は別の機会に与える．

4 符号化定理

通信路符号化定理は Shannon 理論におけるひとつの重要な課題である．直観的には通信路符号化定理は次のように述べることができる．(i) もし情報伝達レート R が通信路容量 C より小さければ，レート R は達成可能である．逆に，(ii) もし R が C より大きければ，レート R は達成できない．

各 $T < \infty$ において $W^{(T)}$ が雑音過程 $Z^{(T)}$ と同値，即ち，$W^{(T)}$ と $Z^{(T)}$ の確率分布が互いに絶対連続である，ようなガウス過程 $W = \{W(t); t \geq 0\}$ を考える．入力信号に対して次の制限を課する．入力信号 $X^{(T)}$ の標本は確率 1 で RKHS $\mathcal{H}_T(W)$ に入り，電力制限

$$E[\|X\|_{W,T}^2] \leq T\rho^2 \tag{40}$$

を満たすものとする．ここで $\rho > 0$ は定数．制限 (40) (cf. (23)) の下での，入力可能なメッセージと入力信号の組の全体を $\mathcal{A}^T(\rho)$ とし，容量を $C^T(\rho) = C(\mathcal{A}^T(\rho))$ と記す．

ここで，単位時間当りの通信路容量を定義する．条件

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E[\|X\|_{W,T}^2] \leq \rho^2 \tag{41}$$

を考える．入力可能なメッセージ θ と入力信号 $X = \{X(t); 0 \leq t < \infty\}$ の組 (θ, X) の全体 $\overline{\mathcal{A}}(\rho)$ を

$$\overline{\mathcal{A}}(\rho) = \{(\theta, X);\ (\theta, X) \text{ は (a.1), (a.2), (41) を満たす}\}$$

と定める．フィードバックの有る GC (1) の単位時間当りの容量 $\overline{C}(\rho)$ は

$$\overline{C}(\rho) = \sup \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} I_T(\theta, Y) \tag{42}$$

で定義される．ここで上限はすべての $(\theta, X) \in \overline{\mathcal{A}}(\rho)$ についてとる．次に

$$P(\theta^{(T)} = m) = \frac{1}{M^{(T)}}, \qquad m = 1, \dots, M^{(T)}, \tag{43}$$

なるメッセージ $\theta^{(T)}$ を考える，ただし $M^{(T)} > 0$ は自然数．このメッセージ $\theta^{(T)}$ をフィードバックの助けを借りて符号化し，そのときの入力信号を $X^{(T)}$ とする．$(\theta^{(T)}, X^{(T)})$ に対応する出力 $Y^{(T)}$ から復号化して得た受信メッセージを $\widehat{\theta}^{(T)}$ とする．レート $R > 0$ は，$M^{(T)} = \left[e^{RT}\right]$（$[x]$ は x を越さない最大の整数）として (43) で与えられるメッセージ $\theta^{(T)}$ に対し入力信号 $X^{(T)}$ および受信メッセージ $\widehat{\theta}^{(T)}$ が存在して $(\theta^{(T)}, X^{(T)}) \in \mathcal{A}^T(\rho)$ かつ誤り確率について

$$\lim_{T\to\infty} P(\theta^{(T)} \neq \widehat{\theta}^{(T)}) = 0$$

が成り立つとき，達成可能という．

GC の雑音過程 $Z = \{Z(t)\}$ がその標準表現において離散スペクトル部分がない場合には，我々 [11] は既に通信路符号化定理を証明した．標準表現に対するこの仮定を落しても，同じ証明方法で次の符号化定理を証明することができる．

定理 6 平均電力制限 (41) の下でのフィードバックの有る GC (1) の容量 $C^T(\rho)$ が

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^2} C^T(\rho) = 0$$

満たしているとする．このとき，もし $R < \overline{C}(\rho)$ で ρ において $\overline{C}(\rho)$ が連続ならばレート R は達成可能である．逆に，もしレート R が達成可能ならば $R \leq \overline{C}(\rho)$ である．

Appendix　定理２の証明

最初に定理 2 の証明のアイディアを述べる．

ここでも，初めの GC (1) の代わりに多次元 WGC の言葉で議論する．$\boldsymbol{X}^0$ を $(\boldsymbol{X}^0, \boldsymbol{B}) \overset{\mathrm{cov}}{\sim} (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{B})$ なるガウス過程とする．対応する出力信号は

$$\boldsymbol{Y}^0 = \boldsymbol{X}^0 + \boldsymbol{B} \tag{44}$$

である．$\boldsymbol{B}$ とは独立なガウス過程 $\boldsymbol{\Theta}^0$ と Volterra 作用素 K があって

$$\boldsymbol{Y}^0 = (\boldsymbol{\Theta}^0 - K\boldsymbol{Y}^0) + \boldsymbol{B} \tag{45}$$

であることが必要である．L を K のレゾルベント作用素とすると，(44), (45) より

$$\boldsymbol{\Theta}^0 = (I+K)(\boldsymbol{X}^0 + \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B} = (I+K)(\boldsymbol{X}^0 - L\boldsymbol{B}) \tag{46}$$

である．メッセージ $\boldsymbol{\Theta}^0$ と雑音 $\boldsymbol{B}$ は独立でなければならないから，結局，次のようにすればよい．Volterra 作用素 L を $\boldsymbol{X}^0 - L\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{B}$ が独立となるように定め，メッセージ $\boldsymbol{\Theta}^0$ を (46) で定めればよい．

以上のアイディアを具体的に実行するため，Volterra 作用素を定義することと，$L\boldsymbol{B}$, $L\boldsymbol{X}^0$

などの正確な定義を与えることが必要である．

そのため，まず Volterra 核を考える．

$$(L_i^l(t,u), L_i^{m,n}(t), L_{j,k}^l(t,u), L_{j,k}^{m,n}(t)), \quad t,\, u \in [0,T],$$

$(i,l=1,...,M,\ j,m=1,...,J,\ k=1,...,K_j,\ n=1,...,K_m)$ が以下の条件 $(L.1)-(L.4)$ を満たすとき Volterra 核という．なお，ここでも，$\sum_i, \sum_l$ は $\{1,...,M\}$ 上の和を表し，$\sum_{j,k}$, $\sum_{m,n}$ は $\{(j,k); j=1,...,J,\ k=1,...,K_j\}$ 上の和を表す．

(L.1)　$t<u$ のとき $L_i^l(t,u)=0$ で

$$\sum_i \sum_l \int_0^T \int_0^T |L_i^l(t,u)|^2\, dm_l(u) dm_i(t) < \infty.$$

(L.2)
$$\sum_i \int_0^T \sum_{m,n} |L_i^{m,n}(t)|^2\, dm_i(t) < \infty.$$

(L.3)
$$L_{j,k}^l(t,u) = \begin{cases} L_{j,k}^l(u), & \text{if } t \in I_j \text{ and } u \notin I_j \\ 0, & \text{if } t \notin I_j \text{ or } u \in I_j \end{cases}$$

ここで

$$\sum_l \sum_{j,k} \int_0^T |L_{j,k}^l(u)|^2\, dm_l(u) < \infty.$$

(L.4)
$$L_{j,k}^{m,n}(t) = 1_{I_j}(t) L_{j,k}^{m,n}$$

ここで

$$\sum_{j,k} \sum_{m,n} |L_{j,k}^{m,n}|^2 < \infty.$$

雑音 Z に対応する RKHS $\mathcal{H}_T(Z)$ 上で Volterra 核 $(L_i^l, L_i^{m,n}, L_{j,k}^l, L_{j,k}^{m,n})$ をもつ Volterra 作用素 L を

$$\Psi = L\Phi$$

で定義する．ここで $\Phi \in \mathcal{H}_T(Z)$ は (5) で与えられる関数で，Ψ は

$$\Psi(t) = \sum_i \int_0^t F_i(t,u)\psi_i(u)\, dm_i(u) + \sum_{j,k} F_{j,k}(t)\Psi_{j,k}(t)$$

で与えられる．ただし

$$\psi_i(t) = \sum_l \int_0^T L_i^l(t,u)\varphi_l(u)\, dm_l(u) + \sum_{m,n} L_i^{m,n}(t)\Phi_{m,n}(t),$$

$$\Psi_{j,k}(t) = \sum_l \int_0^T L_{j,k}^l(t,u)\varphi_l(u)\, dm_l(u) + \sum_{m,n} L_{j,k}^{m,n}(t)\Phi_{m,n}(t).$$

明らかに L は $\mathcal{H}_T(Z)$ の線形作用素である．

Volterra 作用素に対する古典的な理論の場合と同様にして次の補題が証明できる．

補題 2 L は $\mathcal{H}_T(Z)$ 上の Volterra 作用素とする．このとき，

$$(I+K)(I+L)=I$$

を満たす $\mathcal{H}_T(Z)$ 上の Volterra 作用素 K が存在する．ここで I は $\mathcal{H}_T(Z)$ 上の恒等作用素．

作用素 K を L のレゾルベント作用素と呼ぶ．

(12) で与えた確率過程 $\boldsymbol{B}=\{\boldsymbol{B}(t)\}$, $\boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{X}(t)\}$, $\boldsymbol{Y}=\{\boldsymbol{Y}(t)\}$ に対し，確率過程 $L[\boldsymbol{B}]=\{L[\boldsymbol{B}](t)\}$, $L[\boldsymbol{X}]=\{L[\boldsymbol{X}](t)\}$, $L[\boldsymbol{Y}]=\{L[\boldsymbol{Y}](t)\}$ を以下のように定める．まず，$L[\boldsymbol{B}](t)\equiv((W_i(t),W_{j,k}(t));(i,j,k)\in\boldsymbol{N})$ を

$$\begin{cases} W_i(t)=\sum_l\int_0^T L_i^l(t,u)\,dB_l(u)+\sum_{m,n}L_i^{m,n}(t)B_{m,n}(t), \\ W_{j,k}(t)=\sum_l\int_0^T L_{j,k}^l(t,u)\,dB_l(u)+\sum_{m,n}L_{j,k}^{m,n}(t)B_{m,n}(t). \end{cases} \tag{47}$$

で定める．$L[\boldsymbol{X}](t)\equiv(V_i(t),V_{j,k}(t);\ (i,j,k)\in\boldsymbol{N})$ は

$$\begin{cases} V_i(t)=\sum_l\int_0^T L_i^l(t,u)x_l(u)\,dm_l(u)+\sum_{m,n}L_i^{m,n}(t)X_{m,n}(t), \\ V_{j,k}(t)=\sum_l\int_0^T L_{j,k}^l(t,u)x_l(u)\,dm_l(u)+\sum_{m,n}L_{j,k}^{m,n}(t)X_{m,n}(t). \end{cases}$$

で与える．最後に，$L[\boldsymbol{Y}](t)$ を

$$L[\boldsymbol{Y}](t)=L[\boldsymbol{X}](t)+L[\boldsymbol{B}](t)$$

で定義する．

補題 3 $X=\{X(t)\}$ は入力可能な信号で (8) のように表現されているとする．区間 $[0,T]$ 上の signed measures $Q_i^l(t,\cdot)$ と $Q_{j,k}^l(t,\cdot)$ を

$$Q_i^l(t,A)=E\left[x_i(t)\int_A dB_l(u)\right],\qquad Q_{j,k}^l(t,A)=E\left[X_{j,k}(t)\int_A dB_l(u)\right],$$

で定める．このとき，各 i,j,k,l および $t\in[0,T]$ に対し，測度 $Q_i^l(t,\cdot)$ および $Q_{j,k}^l(t,\cdot)$ は測度 m_l に関し絶対連続である．

ここで関数 $L_i^l(t,u)$, $L_i^{m,n}(t)$, $L_{j,k}^l(t,u)$, $L_{j,k}^{m,n}(t)$ を

$$\begin{cases} L_i^l(t,u)=\dfrac{dQ_i^l(t,\cdot)}{dm_l}(u), \\ L_i^{m,n}(t)=E[x_i(t)B_{m,n}(t)], \\ L_{j,k}^l(t,u)=\dfrac{dQ_{j,k}^l(t,\cdot)}{dm_l}(u), \\ L_{j,k}^{m,n}(t)=E[X_{j,k}(t)B_{m,n}(t)]. \end{cases} \tag{48}$$

で定める．(48) の第一式は

$$E\left[x_i(t)\int_0^T f(u)\,dB_l(u)\right]=\int_0^T L_i^l(t,u)f(u)\,dm_l(u),\quad f\in L^2([0,T],dm_l), \tag{49}$$

を意味していることに注意しておく．このとき，次のことが証明できる．

補題 4 核 $(L_i^l(t,u),\ L_i^{m,n}(t),\ L_{j,k}^l(t,u),\ L_{j,k}^{m,n}(t))$ を (48) で与えると，定理 2 の仮定の下で次の (i), (ii) が成立する．

(i) この核は条件 (L.1) - (L.4) を満たす．

(ii) 任意の t, s に対し確率変数 $x_i(t) - W_i(t)$, $X_{j,k}(t) - W_{j,k}(t)$ は $\boldsymbol{B}(s)$ と直交する．ここで $W_i(t)$, $W_{j,k}(t)$ は (47) で与えたもの．

準備が整ったので，ここで定理 2 を証明する．

定理 2 の証明． 確率過程 $\boldsymbol{X}^0 = \{\boldsymbol{X}^0(t)\}$, $\boldsymbol{X}^0(t) = ((X^0(t), X_{j,k}^0(t)); (i,j,k) \in \boldsymbol{N})$ を $(\boldsymbol{X}^0, Z)$ がガウス系をなしかつ $(\boldsymbol{X}^0, Z) \overset{\text{cov}}{\sim} (\boldsymbol{X}, Z)$ であるようなガウス過程とする．L を (48) で与えられる核をもつ $\mathcal{H}_T(Z)$ 上の Volterra 作用素とし，K を L のレゾルベント作用素とする．確率過程 $\boldsymbol{Y}^0 = \{\boldsymbol{Y}^0(t)\}$ は (44) で定義し，$\boldsymbol{\Theta}^0(t) = ((\theta_i^0(t), \theta_{j,k}^0(t)); (i,j,k) \in \boldsymbol{N})$ を

$$\boldsymbol{\Theta}^0(t) = (I + K)[\boldsymbol{X}^0 - L[\boldsymbol{B}]](t) \tag{50}$$

で定義する（(46) 参照）．このとき，容易に

$$\boldsymbol{X}^0(t) - \boldsymbol{\Theta}^0(t) = -K[\boldsymbol{Y}^0](t) \tag{51}$$

が示せる．よって

$$\boldsymbol{Y}^0(t) = \boldsymbol{X}^0(t) + \boldsymbol{B}(t) = (\boldsymbol{\Theta}^0(t) - K[\boldsymbol{Y}^0](t)) + \boldsymbol{B}(t) \tag{52}$$

を得る（(45) 参照）．確率過程 $\theta^0 = \{\theta^0(t)\}$ を

$$\theta^0(t) = \sum_i \int_0^t F_i(t,u)\theta_i^0(u)\, dm_i(u) + \sum_{j,k} F_{j,k}(t)\theta_{j,k}^0(t), \quad 0 \le t \le T,$$

で定める．$\zeta_i^0(t)$ および $\zeta_{j,k}^0(t)$ を $K[\boldsymbol{Y}^0](t)$ の各々 i, (j,k) 成分とし，$\zeta^0 = \{\zeta^0(t)\}$ を

$$\zeta^0(t) = \sum_i \int_0^t F_i(t,u)\zeta_i^0(u)\, dm_i(u) + \sum_{j,k} F_{j,k}(t)\zeta_{j,k}^0(t), \quad 0 \le t \le T,$$

で定める．性質 (iv) - (vi) は定義から明かである．式 (51) と (52) はおのおの (26) と (25) に同値である．補題 4 の (ii) に注意すれば，すべての t, s に対して $\boldsymbol{X}^0(t) - L[\boldsymbol{B}](t)$ と $\boldsymbol{B}(s)$ は互いの直交していることがわかる．故に (v) と (50) を使い，$\boldsymbol{\Theta}^0 = \{\boldsymbol{\Theta}^0(t)\}$ は，したがって $\theta^0 = \{\theta^0(t)\}$ は $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{B}(t)\}$ と独立なことがわかる． □

References

[1] Cover, T. M. and Pombra, S.: Gaussian feedback capacity. IEEE Trans. Inform. Theory, **IT-35** (1989), 37–43.

[2] Hida, T. and Hitsuda, M.: Gaussian Processes. Amer. Math. Soc., 1992.

[3] Hida, T., Hitsuda, M. and Ihara, S.: in preparation.

[4] Hitsuda, M.: Mutual information in Gaussian channels. J. Multivariate Anal., **4** (1974), 66–73.

[5] Hitsuda, M. and Ihara, S.: Gaussian channels and the optimal coding. J. Multivariate Anal., **5** (1975), 106–118.

[6] Ihara, S.: On the capacity of channels with additive non-Gaussian noise. Information and Control, **37** (1978), 34–39.

[7] Ihara, S.: On the capacity of the continuous time Gaussian channel with feedback. J. Multivariate Anal., **10** (1980), 319–331.

[8] Ihara, S.: Capacity of discrete time Gaussian channel with and without feedback, I. Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. (Math.), **9** (1988), 21–36.

[9] Ihara, S.: Capacity of mismatched Gaussian channels with and without feedback. Probability Theory Rel. Fields, **84** (1990), 453–471.

[10] Ihara, S.: Mutual information and capacity of the continuous time Gaussian channel with feedback. in *Gaussian Random Fields*, World Scientific, 1991, pp. 242–256.

[11] Ihara, S.: Coding theorems for the continuous time Gaussian channel with feedback II. in *Proc. Sixth USSR-Japan Symp. on Prob. Theory and Math. Stat.*, World Scientific, 1992, pp. 132–142.

[12] Ihara, S.: Information Theory for Continuous Systems. World Scientific, 1993.

[13] Kadota, T. T., Zakai, M. and Ziv, J.: Mutual information of the white Gaussian channel with and without feedback. IEEE Trans. Inform. Theory, **IT-17** (1971), 368–371.

[14] Kolmogorov, A. N.: Theory of information transmission. A. M. S. Transl., Ser. 2, **33** (1963), 291–321.

[15] Pinsker, M.S.: Information and Information Stability of Random Variables and Processes. Holden-Day, 1964.

[16] Shannon, C. E.: A mathematical theory of communication. Bell System Tech. J., **27** (1948), 379–423, 623–656.

[17] Shannon, C. E.: Communication in the presence of noise. Proc. IRE, **37** (1949), 10–21.